Programme de khôlle n° 20

Semaine du 23 Mars

Cours

- **Chapitre 11 : Espaces vectoriels**
  - $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{R}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et de l'ensemble des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  - Sous-espaces vectoriels, s-e.v. engendrés par une famille de vecteurs, l'ensemble des solutions d'un systèmes linéaires homogènes à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. L'intersection de 2 s-e.v. est un s-e.v.. Droites vectorielles. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, et $\mathbb{R}^2$.
  - Famille génératrice, famille libre, base. Théorème de la base incomplète, dimension. Décomposition unique d'un vecteur dans une base. Une famille libre d'un e.v. de dimension n a au plus n éléments avec égalité ssi c'est une base, une famille génératrice d'un e.v. de dimension n a au moins n éléments avec égalité ssi c'est une base. Si $F \subset E$ alors $\dim(F) \leq \dim(E)$ avec égalité ssi $F = E$.
  - Base et dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Une famille de polynômes échelonnées en degré est libre.
  - Applications linéaires : somme, produit par un réel, composition. Noyau et image. Injection, surjections et bijections.
  - Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$, si elle est surjective alors $\dim(E) \geq \dim(F)$, si elle est bijective alors $\dim(E) = \dim(F)$.
  - Image d'une base par une injection, une surjection, une bijection.
  - Rang d'une application linéaire, théorème du rang
  - Endomorphismes, opérations sur les endomorphismes, puissances d'un endomorphismes, conditions d'inversibilité.

Questions de cours et exercice

- **Questions de cours**
  - Si E et F sont des R-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E
  - Si E et F sont des R-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F
  - Si E et F sont des R-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
  - Montrer que si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est injective si et seulement si $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est une famille libre de F.
  - Montrer que si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est surjective si et seulement si $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est une famille génératrice de F.